ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 60

Α2.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

Α3.

α) Άρτια

β) Τίποτα

γ) Περιττή

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\begin{cases} x-\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2} \\ 3x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

Β2. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \left| \begin{matrix} (-2) \\ \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y=-2 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε:

$(-4x+2y)+(3x-2y)=-2 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$

Αντικαθιστούμε το x=2 στην $2x-y=1$ και έχουμε:

$2\cdot 2-y=1 \Leftrightarrow 4-y=1 \Leftrightarrow -y=1-4 \Leftrightarrow -y=-3 \Leftrightarrow y=3$

Άρα $(x_o, y_o)=(2,3)$

Β3. Έχουμε $g(x)=|x-2|-3$

Η g(x) προκύπτει από την f(x), αν την μετατοπίσουμε τρεις μονάδες προς τα κάτω και δύο μονάδες δεξιά.

Β4. $h(x)=f(x)+y_0 \Leftrightarrow h(x)=|x|+3$

Το πεδίο ορισμού της h είναι $A_h=\mathbb{R}$ οπότε ,

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

ii) $h(-x)=|-x|+3=|x|+3=h(x)$

Άρα η h είναι άρτια.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x+\alpha y=1 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha-1$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \alpha-1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 1$

$$D_x=\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-1$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-\alpha$$

Άρα αν $\alpha\neq 1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0,y_0) ;όπου.

$$x_0=\frac{Dx}{D}=\frac{\alpha^2-1}{\alpha-1}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha-1}=\alpha+1$$

$$y_0=\frac{Dy}{D}=\frac{1-\alpha}{\alpha-1}=\frac{-(\alpha-1)}{\alpha-1}=-1$$

Άρα $(x_0,y_0)=(\alpha+1,-1)$

Γ2. Αν $D=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.Για α=1 το σύστημα γράφεται :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , οι οποίες είναι όλα τα ζεύγη της μορφής :

$(x,y)=(\kappa,1-\kappa)$ με $\kappa\in\mathbb{R}$

Γ3. Το Σ_1 έχει άπειρες λύσεις αν $D=0$

Άρα $\alpha=1$.Για α=1 το (Σ2) γράφεται

$$(\Sigma_2):\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=1 \end{cases}$$ οπότε είναι αδύνατο.

Γ4. Έχουμε $f(x)=\sqrt{2}\eta\mu\frac{21\pi}{4}x^2-2(\alpha-1)x+\alpha^2-1$

$$\eta\mu\frac{21\pi}{4}=\eta\mu\left(\frac{16\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $f(x)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2-2(\alpha-1)x+\alpha^2-1$

$f(x)=-x^2-2(\alpha-1)x+\alpha^2-1$

Αφού $f(x)\le 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ο συντελεστής του x^2 είναι $-1<0$

Πρέπει

$\Delta\le 0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma\le 0 \Leftrightarrow \left[-2(\alpha-1)\right]^2-4(-1)(\alpha^2-1)\le 0 \Leftrightarrow$

$4(\alpha^2-2\alpha+1)+4\alpha^2-4\le 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2-8\alpha+4+4\alpha^2-4\le 0 \Leftrightarrow$

$8\alpha^2-8\alpha\le 0 \Leftrightarrow 8\alpha(\alpha-1)\le 0$

Λύνουμε την $\alpha(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\alpha=1$

Κάνουμε πίνακα προσήμου της $\alpha(\alpha-1)=\alpha^2-1$

α	$-\infty$	0		1		$+\infty$
α^2-1	+	●	-	●	+	

Άρα $\alpha\in[0,1]$, όμως το (Σ1) έχει μοναδική λύση.

Άρα $\alpha\ne 1$, οπότε $\alpha\in[0,1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\Gamma = \eta\mu\frac{\pi}{10} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5} - \varepsilon\varphi\frac{19\pi}{4} =$$

$$= \eta\mu\frac{\pi}{10} - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \eta\mu\frac{\pi}{10} - \eta\mu\left(\frac{5\pi - 4\pi}{10}\right) - \varepsilon\varphi\left(4\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \eta\mu\frac{\pi}{10} - \eta\mu\frac{\pi}{10} - \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$$

$$B = \sigma\upsilon\nu^2(-\omega) - 3\eta\mu(\pi + \omega)\eta\mu(4\pi - \omega) + 3\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\omega - 3(-\eta\mu\omega)(-\eta\mu\omega) + 3\eta\mu^2\omega =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\omega - 3\eta\mu^2\omega + 3\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

Δ2.

$$A = \frac{\eta\mu(15\pi\text{-}\omega)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\text{-}\omega\right)\varepsilon\varphi(\pi\text{+}\omega)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}\text{-}\omega\right)\sigma\varphi(\pi\text{-}\omega)\varepsilon\varphi(\text{-}\omega)} =$$

$$A = \frac{\eta\mu(\pi - \omega)\eta\mu\omega(+\varepsilon\varphi\omega)}{\varepsilon\varphi\omega(-\sigma\varphi\omega)(-\varepsilon\varphi\omega)}$$

$$A = \eta\mu^2\omega$$

$\Gamma - B = A \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega = \eta\mu^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$, Ισχύει.

Δ3.

Έχουμε: $\sqrt{\frac{1-\sqrt{B}}{1+\sqrt{B}}}-\sqrt{\frac{1+\sqrt{B}}{1-\sqrt{B}}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{συν^2ω}}{1+\sqrt{συν^2ω}}}-\sqrt{\frac{1+\sqrt{συν^2ω}}{1-\sqrt{συν^2ω}}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1-|συνω|}{1+|συνω|}}-\sqrt{\frac{1+|συνω|}{1-|συνω|}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1+συνω}{1-συνω}}-\sqrt{\frac{1-συνω}{1+συνω}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \qquad \left(ω\in\left(\frac{π}{2},π\right)\right)$$

$$\sqrt{\frac{(1+συνω)^2}{(1-συνω)(1+συνω)}}-\sqrt{\frac{(1-συνω)^2}{(1+συνω)(1-συνω)}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(1+συνω)^2}{1-συν^2ω}}-\sqrt{\frac{(1-συνω)^2}{1-συν^2ω}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(1+συνω)^2}{ημ^2ω}}-\sqrt{\frac{(1-συνω)^2}{ημ^2ω}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+συνω}{ημω}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1-συνω}{ημω}\right)^2}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\left|\frac{1+συνω}{ημω}\right|-\left|\frac{1-συνω}{ημω}\right|=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\left(-1<συνω<0, ημω>0 \text{ για } ω\in\left(\frac{π}{2},π\right)\right)$$

$$\frac{1+συνω}{ημω}-\frac{1-συνω}{ημω}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\frac{1+συνω-(1-συνω)}{ημω}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1+συνω-1+συνω}{ημω}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\frac{2συνω}{ημω}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow σφω=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$εφω=\frac{1}{σφω}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}$$

$$συν^2ω=\frac{1}{1+εφ^2ω}=\frac{1}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

άρα $συν^2ω=\frac{1}{4}\Leftrightarrow|συνω|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -συνω=\frac{1}{2},\left[\text{Διότι } ω\in\left(\frac{π}{2},π\right)\right]$

οπότε $συνω=-\frac{1}{2}$

Αφού $εφω = \frac{ημω}{συνω} \Leftrightarrow ημω = εφω \cdot συνω \Leftrightarrow ημω = -\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow ημω = \frac{\sqrt{3}}{2}$.